المعادلات الآنية

المعادلات الخطية الآنية في متغيرين

المعادلة الخطية في متغيرين على صورة $\text{ص} = \text{م}\,\text{س} + \text{جـ}$
ولحل أي معادلتين خطيتين في متغيرين علينا الآتي:

1- وضع المعادلتين على صورة:

$$\text{ص} = \text{م}_1\,\text{س} + \text{جـ}_1$$
$$\text{ص} = \text{م}_2\,\text{س} + \text{جـ}_2$$

2- عند تساوي معاملا س "م" والحد المطلق "جـ" في كلا المعادلتين بمعنى:

$$\text{م}_1 = \text{م}_2 \quad ، \quad \text{جـ}_1 = \text{جـ}_2$$

فإنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول لأن المستقيمين منطابقان على بعضهما تماماً.

3- عند تساوي معاملا س في كلا المعادلتين "لهما نفس الميل" مع اختلاف الحد المطلق "جـ" في كلاهما بمعنى:

$$\text{م}_1 = \text{م}_2 \quad ، \quad \text{جـ}_1 \neq \text{جـ}_2$$

فإنه لا يوجد حل بالمرة لأنهما متوازيان

4- عند اختلاف معاملا س "عدم تساوي الميل" في كلا المعادلتين كذلك اختلاف الحد المطلق "جـ" بمعنى

$$\text{م}_1 \neq \text{م}_2 \quad ، \quad \text{جـ}_1 \neq \text{جـ}_2$$

فإنه يوجد حل وحيد لأن المستقيمين متقاطعين

5- توجد حالة خاصة عندما $\text{م}_1 \neq \text{م}_2$ ، $\text{جـ}_1 = \text{جـ}_2$
فإنه يوجد حل وحيد فقط ويتقاطع المستقيمان في نقطة الأصل (٠،٠)

حل تمارين الكتاب

مما يلي عين أزواج المعادلات غير الثابتة التي لها حل وحيد أو التي لها عدد غير منتهٍ من الحلول:

1) س + ص = 3

س − ص = 4 الحل:

أولاً بوضع المعادلتين على صورة ص = م س + جـ .

س + ص = 3 ⟵ ص = −س + 3 ⟵ (1)

س − ص = 4 ⟵ ص = س − 4 ⟵ (2)

نلاحظ أن: م١ = −١ ، م٢ = +١

جـ١ = 3 ، جـ٢ = −4

∵ م١ ≠ م٢ ، جـ١ ≠ جـ٢

∴ يوجد حل وحيد لأنهما متقاطعان.

---

2) 2س + ص = 3

2س + ص = 4 الحل:

ص = −2س + 3 ⟵ (1)

ص = −2س + 4 ⟵ (2)

نلاحظ: م١ = م٢ ، جـ١ ≠ جـ٢

∴ لا يوجد حل بالمرة لأن المستقيمان متوازيان

---

3) 3س − ص = 1

3ص + 3 = 9س الحل:

المعادلة الأولى: ص = 3س − 1

بقسمة المعادلة الثانية على 3

(3)

$\frac{\cancel{3}\text{ص}}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{9}\text{س}}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}$ ⟸ ص = 3س − 1

∴ ص = 3س − 1 ⟵ ①

ص = 3س − 1 ⟵ ②

نلاحظ: م1 = م2 ، جـ1 = جـ2

∴ يوجد عدد لانهائي من الحلول لأن المستقيمين منطبقين على بعضهما تماماً.

4) 3س − 4ص = 6

4ص − 3س = 6 الحل:

أولاً: بقسمة المعادلة الأولى على 4 للتخلص من معامل ص.

$\frac{3\text{س}}{4} - \frac{\cancel{4}\text{ص}}{\cancel{4}} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}$ ⟸ $\frac{3}{4}$ س − ص = $\frac{3}{2}$

∴ ص = $\frac{3}{4}$ س − $\frac{3}{2}$ ⟵ ①

ثانياً: بقسمة المعادلة الثانية على 4 للتخلص من معامل ص

$\frac{\cancel{4}\text{ص}}{\cancel{4}} - \frac{3\text{س}}{4} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}$ ⟸ ص = $\frac{3\text{س}}{4}$ + $\frac{3}{2}$

∴ ص = $\frac{3}{4}$ س + $\frac{3}{2}$ ⟵ ②

نلاحظ: م1 = م2 ، جـ1 ≠ جـ2

∴ لا يوجد حل بالمرة لأن المستقيمان متوازيان

5) س − ص − 3 = 0

ص − س + 3 = 0 الحل:

ص = س − 3 ← (1)

ص = س − 3 ← (2)

نلاحظ أن: $م_1 = م_2$ ، $ب_1 = ب_2$

∴ يوجد عدد لا نهائي من الحلول لأن المستقيمين منطبقين

---

16) 3س − ص = 0

ص − 3س = 1 الحل:

ص = 3س ← (1)

ص = 3س + 1 ← (2)

نلاحظ $م_1 = م_2$ ، $ب_1 \neq ب_2$

∴ لا يوجد حل بالمرة لأن المستقيمين متوازيان

---

17) س − ص = 4

ص − س = −5 الحل:

ص = س − 4 ← (1)

ص = س − 5 ← (2)

نلاحظ $م_1 = م_2$ ، $ب_1 \neq ب_2$

∴ لا يوجد حل بالمرة لأن المستقيمين متوازيين

---

18) 3س − 4ص = 0

6س − 3ص = 0 الحل.

بقسمة المعادلة الأولى على 4 ∴ $\frac{3س}{4} - \frac{\cancel{4}ص}{\cancel{4}} = 0$

∴ $\frac{3}{4}$س − ص = 0 ⟸ ص = $\frac{3}{4}$س ← (1)

بقسمة المعادلة الثانية على 3

$\therefore \frac{4}{3}$ س $- \frac{3}{3}$ ص $= 0 \Longleftarrow \frac{4}{3}$ س $-$ ص $= 0$

$\therefore$ ص $= \frac{4}{3}$ س ← (2)

نلاحظ من المعادلة (1) ، (2)

$\frac{أ_1}{أ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$ ، $جـ_1 = جـ_2 = 0$.

$\therefore$ يوجد حل وحيد فقط. لأن المستقيمان متقاطعان في نقطة الأصل (0، 0) .

المعادلات الخطية والغير خطية الآنية في متغيرين

المعادلات الغير خطية في متغيرين تكون على صورة :-

أ) ص $=$ أ س^2 $+$ ب س $+$ جـ "معادلة قطع مكافئ"

ب) س ص $=$ ك ، ص $= \frac{ك}{س}$ "معادلة منحنى تناسب"

جـ) ص س^2 $=$ ك ، ص $= \frac{ك}{س^2}$ "معادلة منحنى تناسب تربيعي"

د) س^2 $+$ ص^2 $=$ أ "معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل"

ولحل معادلتين خطية وغير خطية في متغيرين يجب علينا الآتي :-

1) إبدأ بالمعادلة الخطية واجعل أحد المتغيرين متغير تابع والآخر مستقل.

يعني نضعها على صورة ص $=$ أ س $+$ ب

2) عوض عن هذا المتغير في المعادلة الغير خطية فنحصل على معادلة تربيعية في متغير واحد.

3) يمكن حل المعادلة التربيعية بإحدى الطرق.

أ) التحليل إلى عوامل

ب) باستخدام صيغة $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

ملاحظات ومعلومات هامة عند تحليل المقدار الثلاثي:-

1- رتب حدود المقدار الثلاثي تنازلياً مع مساواة المقدار بالصفر

$أ س^2 + ب س + جـ = ٠$

2- استخرج العامل المشترك الأعلى إن وجد.

3- حلل الحد الأول والحد الأخير لعواملة الأولية.

4- اذا كان الحد الثالث موجباً فإن اشارتي عامليه إما موجبين معاً أو سالبين معاً، وتتفقان مع اشارة الحد الأوسط "ب س": إذا كان الحد الأوسط موجب يكون عاملي الحد الثالث موجبان، وإذا كان الحد الأوسط سالب كان العاملين سالبان.

5- إذا كان الحد الثالث سالب كانت اشارتي عامليه مختلفتين والعامل الأكبر يأخذ اشارة الحد الأوسط

أمثلة:-

1- $س^2 - 5س - 24 = ٠$ "مقدار ثلاثي بسيط"

س س   -8 +3

$\therefore (س - 8)(س + 3) = ٠$

$\therefore$ إما $س = +8$ ، أو $س = -3$.

2- $س^2 - 3س + 2 = ٠$ "مقدار ثلاثي بسيط"

س س   -2 -1

$\therefore (س - 1)(س - 2) = ٠$

$\therefore$ إما $س = +1$ أو $س = +2$.

3. $6س^2 - س - 15 = 0$ «مقدار ثلاثي غير بسيط»

$2س \quad 3س \qquad +3 \quad -5$

$2س$	$+3$	$9س$	
$3س$	-5	$-10س$	
		$-س$	

$(2س + 3)(3س - 5) = 0$

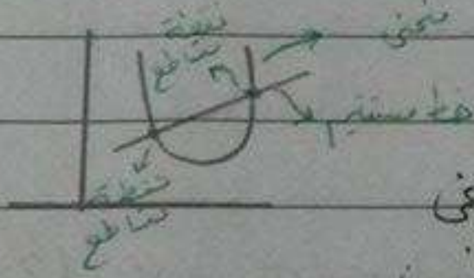
$\therefore 2س = -3 \implies س = \frac{-3}{2}$

$3س = 5 \implies س = \frac{5}{3}$.

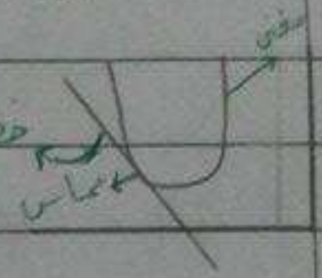
ملاحظة هامة:

عند حل معادلتين خطية وتربيعية فإنه من المحتمل أن:

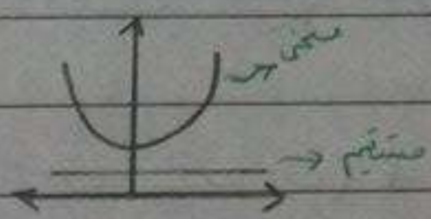
1) يقطع المستقيم المنحنى من الدرجة الثانية في نقطتين مختلفتين:-



2) يقطع المستقيم المنحنى من الدرجة الثانية في نقطة واحدة «مماس»



3) لا يقطع ولا يمس.



حل تمرين (1-2) صفحة 5 من الكتاب المدرسي

حل أزواج المعادلات الآتية:-

1) $ص - س = 3$ ، $س ص = 4$

الحل:-

نبدأ بالمعادلة الخطية: $ص - س = 3$ ونجعل س في طرف وص في الطرف الآخر

∴ ص = 3 + س ، بالتعويض بقيمة ص في المعادلة السابقة.

∴ س (3 + س) = 4

3 س + س² − 4 = 0   نرتب المعادلة ترتيباً تنازلياً

س² + 3 س − 4 = 0   نحلل المقدار الثلاثي

س س   −1 +4

(س − 1) (س + 4) = 0 ∴ إما س = +1 أو س = −4

∴ بالتعويض في المعادلة ص = 3 + س عن قيم س لإيجاد قيم ص

∴ عندما س = +1 فإن ص = 3 + 1 = 4

عندما س = −4 فإن ص = 3 − 4 = −1

∴ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين هما

(1 ، 4) ، (−4 ، −1).

---

2) ص − س = 2 ، س² − س ص + ص² = 19

الحل :-

ص − س = 2 ⟸ ص = 2 + س بالتعويض بقيمة ص في المعادلة التربيعية.

∴ س² − س (2 + س) + (2 + س)² = 19

س² − 2 س − س² + 4 + 4 س + س² − 19 = 0   بتجميع الحدود المتشابهة

∴ س² + 2 س − 15 = 0

س س   −3 +5

(س + 5) (س − 3) = 0

∴ س = −5 أو س = +3 بالتعويض في المعادلة ص = 2 + س لإيجاد قيم ص.

∴ عندما $س = -5$ فإن $ص = 2 - 5 = -3$

وعندما $س = 3$ فإن $ص = 2 + 3 = 5$

∴ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين هما

$(-5 ، -3)$ ، $(3 ، 5)$

(3) $ق + ك = 7$ ، $ق^2 + ك^2 = 85$ الحل:

$ق = 7 - ك$ بالتعويض في المعادلة التربيعية

$(7 - ك)^2 + ك^2 = 85$

$49 - 14ك + ك^2 + ك^2 - 85 = 0$

$2ك^2 - 14ك - 36 = 0$ بالقسمة على 2

$ك^2 - 7ك - 18 = 0$

ك ك -9 $+2$

$(ك - 9)(ك + 2) = 0$ ، ∴ $ك = +9$ ، $ك = -2$

بالتعويض عن قيمة ك في المعادلة $ق = 7 - ك$

∴ عندما $ك = 9$ فإن $ق = 7 - 9 = -2$

عندما $ك = -2$ فإن $ق = 7 + 2 = 9$

∴ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين هما

$(9 ، -2)$ ، $(-2 ، 9)$

4. $3س + ص = 5$ ، $س^2 + ص^2 = 5$ الحل:

$ص = 5 - 3س$ بالتعويض في المعادلة التربيعية

$س^2 + (5 - 3س)^2 - 5 = 0$

$س^2 + 25 - 30س + 9س^2 - 5 = 0$ بتجميع الحدود المتشابهة

$10س^2 - 30س + 20 = 0$ بالقسمة على 10

س^2 - 3س + 2 = ٠

س س ، -2 -1

(س - 1)(س - 2) = ٠ ، ∴ س = 1 ، س = 2

عندما س = 1 فإن ص = 5 - 3 × 1 = 2

عندما س = 2 فإن ص = 5 - 3 × 2 = -1

∴ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين هما

(1 ، 2) ، (2 ، -1) .

(5) 5س^2 + ت^2 = 49 ، 5س + ت = 17 الحل :

ت = 17 - 5س بالتعويض في المعادلة التربيعية .

5س^2 + (17 - 5س)^2 - 49 = ٠

5س^2 + 289 - 170س + 25س^2 - 49 = ٠ بتجميع الحدود المتشابهة

30س^2 - 170س + 240 = ٠

بالقسمة على 10

3س^2 - 17س + 24 = ٠

3س س ، -8 -3

3س	-8	-9س
س	-3	-8س
		-17س

∴ (3س - 8)(س - 3) = ٠

∴ 3س - 8 = ٠ ⟸ 3س = 8 ، ∴ س = $\frac{8}{3}$ = 2$\frac{2}{3}$

س - 3 = ٠ ⟸ س = 3

∴ عندما س = $\frac{8}{3}$ فإن ت = 17 - 5 × $\frac{8}{3}$ = $\frac{11}{3}$ = 3$\frac{2}{3}$

عندما س = 3 فإن ت = 17 - 3 × 5 = 2

∴ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين هما

(2$\frac{2}{3}$ ، 3$\frac{2}{3}$) ، (3 ، 2)

(6) س + ص = 11 ، س² + ص² + س ص = 97

الحل:

س = 11 − ص ، بالتعويض في المعادلة التربيعية.

(11 − ص)² + ص² + (11 − ص) ص − 97 = 0

121 − 22ص + ص² + ص² + 11ص − ص² − 97 = 0

ص² − 11ص + 24 = 0

ص ص

−8 −3

(ص − 8)(ص − 3) = 0 ∴ ص = 8 ، ص = 3

∴ عندما ص = 8 فإن س = 11 − 8 = 3

عندما ص = 3 فإن س = 11 − 3 = 8

∴ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتين هما

(8 ، 3) ، (3 ، 8).

---

(7) ص = 3س − 7 ، س² − س ص + ص² = 7 الحل:

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة التربيعية.

∴ س² − س(3س − 7) + (3س − 7)² − 7 = 0

س² − 3س² + 7س + 9س² − 42س + 49 − 7 = 0

7س² − 35س + 42 = 0 بالقسمة على 7

س² − 5س + 6 = 0

س س

−3 −2

(س − 2)(س − 3) = 0 ، ∴ س = 2 ، س = 3

∴ عندما س = 2 فإن ص = 3 × 2 − 7 = − 1

عندما س = 3 فإن ص = 3 × 3 − 7 = 2

∴ نقاط التقاطع هي: (2 ، −1) ، (3 ، 2)

(8) $3س + 2ص = 1$ ، $3س^2 - ص^2 = 5س + 3ص$

الحل:

$3س = 1 - 2ص \Rightarrow س = \frac{1-2ص}{3}$ بالتعويض

$3\left(\frac{1-2ص}{3}\right)^2 - ص^2 - 5\left(\frac{1-2ص}{3}\right) - 3ص = 0$

$\frac{\cancel{3}(1-4ص+4ص^2)}{3\cancel{9}} - ص^2 - \frac{5-10ص}{3} - 3ص = 0$

$\frac{1-4ص+4ص^2}{3} - \frac{3ص^2}{3} - \frac{5+10ص}{3} - \frac{9ص}{3} = 0$

$\frac{ص^2 - 3ص - 4}{3} = 0$ بالضرب في 3

$3ص^2 - 9ص - 12 = 0$

$3ص + 3$	$-12ص$
$ص - 4$	$+3ص$
	$-9ص$

$(3ص + 3)(ص - 4) = 0$

$3ص + 3 = 0 \Rightarrow 3ص = -3$ ، $\therefore ص = -1$

$ص = 4$ ، بالتعويض في المعادلة $س = \frac{1-2ص}{3}$

$\therefore$ عندما $ص = -1$ $\therefore س = \frac{1-2\times(-1)}{3} = \frac{1+2}{3} = 1$

عندما $ص = 4$ ،

$\therefore س = \frac{1-2\times 4}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} = -2\frac{1}{3}$

$\therefore$ نقاط التقاطع هي: $(1 ، -1)$ ، $(-2\frac{1}{3} ، 4)$